

## 實驗 9 簡諧運動

### Exp 9 Simple harmonic motion

Key word：虎克定律、彈性係數、簡諧運動

#### 一、目的

研究滑車在空氣軌上摩擦力很小的情況下，因彈簧恢復力而做的簡諧運動。

#### 二、原理

物體受恢復力的作用做週期性運動，在位移不大的情況下，恢復力和該物體以平衡位置為原點的位移成正比而且恢復力的方向與位移方向相反。受恢復力作用的物體之運動方程式為：

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (1)$$

其中  $m$  為物體的質量， $k$  為彈力常數，(1)式為二階微分方程，它的解可以寫為：

$$x = A \sin(\omega t + \phi) \quad (2)$$

這種週期性運動稱為簡諧運動(simple harmonic motion，它的簡寫為 SHM)。(2)式中的  $A$  為簡諧運動的最大位移量，稱為振幅(amplitude)。 $\omega$  為簡諧運動的角頻率， $\phi$  為物體運動的起始相位。

角頻率  $\omega$  跟物體及彈簧所構成的系統之性質有關。實際去解(1)式時，可以得到  $\omega = \sqrt{k/m}$ ，而週期  $T$  則為：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (3)$$

$A$  及  $\phi$  可以由起始條件，亦即  $t=t_0$  時的運動狀態來決定。假設在運動起始時間  $t_0=0$ ，該物體偏離平衡位置 6cm，而且速度為 0 cm/sec，則  $\phi = \pi/2$ ， $A=6\text{cm}$ 。

此時，位移函數為：

$$x(t) = 6 \cos(\omega t) \quad (\text{cm})$$

知道位移函數  $x(t)$  後，運動中的其它物理量，例如：速度  $v = dx/dt$ ，動能  $K = \frac{1}{2} m v_x^2$  及位能  $U = \frac{1}{2} k x^2$  都可以求出，並且應該滿足能量守恆定律。

(3)式之導證假設彈簧質量為零，如果彈簧質量為  $m_s$ ，則週期應為：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + \frac{1}{3}m_s}{k}} \quad (4)$$

### 三、儀器

滑車軌道裝置，二滑車(其一為阻尼滑車(紅邊滑車，下方含磁鐵)，砝碼及彈簧數個，碼錶，自備：攝影裝置(手機等)，傳輸線，電腦(需有軌跡分析軟體如 Tracker)。

### 四、步驟

#### (一)測量靜態彈性係數(static spring constant)及動態彈性係數(dynamic spring constant)

1. 利用  $F = -kx$  的關係式來測量靜態彈性係數  $k_s$ ：將彈簧鉛垂懸掛，一面增加掛在彈簧下端的砝碼，一面記錄彈簧的伸長量。**注意：不要過度伸張彈簧而造成彈性疲乏。**以砝碼重量  $F$ (單位為牛頓或達因)為縱坐標，伸長量  $x$ (公尺或厘米)為橫坐標，畫出  $F$  與  $x$  的關係圖。如果得到一直線，表示這條彈簧符合虎克定律(Hooke's Law)，而該直線的斜率即為靜態彈性係數  $k_s$ 。
2. 以彈簧懸掛一個物體而形成一個系統，使懸掛物做簡諧運動。以碼錶測量其周期，因為其週期  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ ，故測量已知質量的懸掛物之運動週期，可以由計算得到該彈簧的動態彈性係數  $k_d$ 。
3. 檢視所測得的靜態彈性係數與動態彈性係數是否相等。試討論  $k_s$  與  $k_d$  相同或不同的原因(參考問題 4)。

#### (二)週期 $T$ 與滑車質量 $m$ 的關係

1. 測量滑車質量，做好軌道校正。
2. 將滑車置於軌道上，裝置彈簧如圖 1 所示。將兩條彈簧的一端分別固定在軌道的兩端，(可移動擋板改變彈簧伸長量)，使滑車在軌道上有數厘米的位移後，放開滑車使之振盪，測量振盪週期。**注意：應重覆測多次並求平均值(或用差平均法)。**
3. 使用滑車，加 50 克及加 100 克砝碼，在同樣情形下，測量各個週期。**注意！振盪的振幅不能太大，彈簧不要接觸軌道。**
4. 以  $T$  為縱座標，質量為橫座標作**全對數圖(log-log fig)**，應該會得到一條直線。從這個圖形找出週期  $T$  和滑車質量  $m$  間的關係，證明  $T \propto \sqrt{m}$ 。

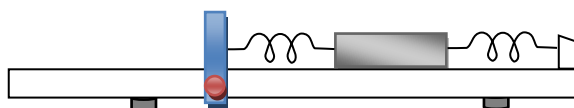


圖 1、簡諧運動的實驗裝置圖

#### (三)週期 $T$ 和彈性係數 $k$ 的關係

1. 取不同彈性係數之彈簧測量各不同彈性係數的彈簧所造成的週期。
2. 先定下平衡位置，然後讓滑車振盪。**注意！振幅不能太小，否則不易觀察；亦不能太大，否則不是簡諧運動。**
3. 找出  $T$  和  $k$  之間的關係。

(四)選一組  $m$  與  $k$ ，以實驗證明：週期  $T$  與振幅  $A$  之大小無關。

**注意：振幅  $A$  不能調太大，以免造成彈簧的永久變形。**

(五)速率  $v_x$  和距離平衡位置的位移  $x$  間的關係

1. 請將所有數據列成表，並檢查這些數據是否符合下列二式：

$$v_x = v_0 \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{A} \quad (5)$$

及

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv_x^2 = \text{常數} \quad (6)$$

2. 攝影紀錄運動影像，以影像軟體分析其震盪軌跡及速度。

(六)阻尼的影響

3. 將滑車換為紅邊阻尼滑車，利用磁鐵移動之渦電流造成阻尼運動，再次實驗。

## 五、問題

1. 在何種情況下，彈簧不遵守虎克定律？
2. 為何圖 1 中，滑車上要兩邊裝彈簧而不能只用一條？
3. 如果彈簧的質量  $m_s$  不能忽略，而且振盪時彈簧的伸長是均勻的，試證週期應為

$$T = 2\pi \sqrt{\left(m + \frac{1}{3}m_s\right) / k}。$$

4. 做簡諧運動的滑車終將停止，找出至少兩個會使滑車停止運動的原因。
5. 當空氣軌不水平對本實驗會有何影響？
6. 任何實驗測量均有誤差，誤差來源除了由實驗者的操作所致以外，每一儀器都有它的測量限度，即它的解析度(resolution)。做完幾個空氣軌實驗後，你是否已瞭解實驗系統的性能和它的解析度？試估計由測量儀器的解析度所造成的百分誤差，並和數據之誤差做比較。